

ex. 23, p. 11 S1 Toute opération élémentaire sur les lignes est réversible. 1	ex. 23, p. 11 S1 Une matrice 5×6 a six lignes. 2
ex. 23, p. 11 S1 Une solution d'un système linéaire d'inconnues $x_1, \dots, x_n$ est un n-uplet $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ de nombres qui transforme chaque équation en une égalité vraie quand on substitue $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ respectivement à $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 3	ex. 23, p. 11 S1 Il existe deux questions fondamentales sur un système linéaire concernant les notions d'existence et d'unicité 4
ex. 21, p. 24 S1 Dans certains cas, à partir d'une matrice donnée, la méthode du pivot peut aboutir à différentes matrices échelonnées réduites selon le choix des opérations élémentaires. 5	ex. 21, p. 24 S1 On ne peut appliquer la méthode du pivot qu'à des matrices complètes de systèmes linéaires. 6
ex. 21, p. 24 S1 Une inconnue principale est une inconnue qui correspond à une colonne de pivot dans la matric des coefficients du système. 7	ex. 21, p. 24 S1 Il revient au même de trouver une représentation paramétrique de l'ensemble des solutions d'un système et de <i>résoudre</i> le système 8

faux

vrai

2

1

vrai

faux

4

3

faux

faux

6

5

vrai

vrai

8

7

ex. 21, p. 24 S1 Si l'une des lignes d'une forme échelonnée d'une matrice complète est $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$, alors le système associé est incompatible 9	ex. 23, p. 35-36 S1 Une autre notation possible du vecteur $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} -4 & 3 \end{pmatrix}$ 10
ex. 23, p. 35-36 S1 Les deux points du plan correspondant aux vecteurs $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont une même droite passant par l'origine 11	ex. 23, p. 35-36 S1 Le vecteur $\frac{1}{2}\vec{v}_1$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ 12
ex. 23, p. 35-36 S1 L'ensemble des solutions du système linéaire dont la matrice complète s'écrit sous la forme $\begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{b} \end{bmatrix}$ est égal à l'ensemble des solutions de l'équation $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 = \vec{b}$ 13	ex. 23, p. 35-36 S1 On peut toujours interpréter l'ensemble $\text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$ comme un plan passant par l'origine. 14
ex. 23, p. 45 S2 L'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ est appelée <i>équation vectorielle</i>. 15	ex. 23, p. 45 S2 Un vecteur $\vec{b}$ est combinaison linéaire des colonnes d'une matrice A si et seulement si l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ admet au moins une solution. 16

faux

faux

10

9

vrai

faux

12

11

faux

vrai

14

13

vrai

faux

16

15

ex. 23, p. 45 S2 L'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ est compatible s'il existe une position de pivot dans chaque ligne de la matrice complète $\begin{bmatrix} A & \vec{b} \end{bmatrix}$. 17	ex. 23, p. 45 S2 La première composante du produit $A\vec{x}$ s'exprime comme une somme de produits. 18
ex. 23, p. 45 S2 Si les colonnes d'une matrice A de type $m \times n$ engendrent $\mathbb{R}^m$, alors l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ est compatible pour tout vecteur $\vec{b}$ de $\mathbb{R}^m$. 19	ex. 23, p. 45 S2 Si A est une matrice $m \times n$ et si l'on peut trouver un vecteur $\vec{b}$ de $\mathbb{R}^m$ tel que l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ soit incompatible, alors il ne peut exister une position de pivot dans chaque ligne de A. 20
ex. 23, p. 52 S2 Une équation homogène est toujours compatible. 21	ex. 23, p. 52 S2 L'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ donne une description explicite de son ensemble des solutions. 22
ex. 23, p. 52 S2 L'équation homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ admet la solution triviale si et seulement si elle possède au moins une inconnue non principale. 23	ex. 23, p. 52 S2 La relation $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{v}$ définit une droite passant par $\vec{v}$ et dirigée $\vec{p}$. 24

vrai

faux

18

17

vrai

vrai

20

19

faux

vrai

22

21

faux

faux

24

23

ex. 23, p. 52 S2 L'ensemble des solutions de $A\vec{x} = \vec{b}$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $\vec{w} = \vec{p} + v_h$, où v_h est une solution quelconque de l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ 25	ex. 28, p. 52 S2 (a) l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ admet une solution non triviale. (b) l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ a au moins une solution. A est une matrice 3×3 possédant trois positions de pivot. 26
ex. 28, p. 52 S2 (a) l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ admet une solution non triviale. (b) l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ a au moins une solution. A est une matrice 4×4 possédant trois positions de pivot. 27	ex. 28, p. 52 S2 (a) l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ admet une solution non triviale. (b) l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ a au moins une solution. A est une matrice 2×5 possédant deux positions de pivot. 28
ex. 28, p. 52 S2 (a) l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ admet une solution non triviale. (b) l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ a au moins une solution. A est une matrice 3×2 possédant deux positions de pivot. 29	ex. 21, p. 66 S3 Les colonnes de la matrice A sont linéairement indépendantes si le vecteur nul est solution de l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ 30
ex. 21, p. 66 S3 Si $\mathcal{F}$ est une famille liée, alors chacun de ses vecteurs est une combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$. 31	ex. 21, p. 66 S3 Les colonnes de toute matrice 4×5 sont linéairement dépendantes. 32

a. non
b. oui

vrai

26

25

a. oui
b. oui

a. oui
b. non

28

27

faux

a. non
b. non

30

29

vrai

faux

32

31

ex. 21, p. 66 S3 Si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont linéairement indépendants, et si $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ sont linéairement dépendants, alors $\vec{z}$ appartient à $\text{Vect}\{\vec{x}, \vec{y}\}$. 33	ex. 33, p. 67 S3 Si $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_4$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ et que $\vec{v}_3 = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2$, alors $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$ sont linéairement dépendants. 34
ex. 34, p. 67 S3 Si $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ et que $\vec{v}_2$ n'est pas colinéaire à $\vec{v}_1$, alors $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont linéairement indépendants. 35	ex. 35, p. 67 S3 Si $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_5$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^5$ et que $\vec{v}_3 = \vec{0}$, alors $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ et $\vec{v}_5$ sont linéairement dépendants. 36
ex. 36, p. 67 S3 Si $\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_3$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et que $\vec{v}_3$ n'est pas combinaison linéaire de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, alors $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ sont linéairement indépendants. 37	ex. 37, p. 67 S3 Si $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_4$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ et que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est liée, alors $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ est également liée. 38
ex. 38, p. 67 S3 Si $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_4)$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^4$, alors $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est également libre. 39	ex. 21, p. 75 S3 Une application linéaire est un type particulier de fonction 40

vrai

vrai

34

33

vrai

vrai

36

35

vrai

faux

38

37

vrai

vrai

40

39

ex. 21, p. 75 S3 Si A est une matrice 3×5 et T l'application définie par $T(\vec{x}) = A\vec{x}$, alors l'espace de départ de T est $\mathbb{R}^3$. 41	ex. 21, p. 75 S3 Si A est une matrice $m \times n$, alors l'image de l'application $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ est $\mathbb{R}^m$. 42
ex. 21, p. 75 S3 Toute application linéaire est une transformation matricielle. 43	ex. 21, p. 75 S3 Une application T est linéaire si et seulement si $T(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2) = c_1T(\vec{v}_1) + c_2T(\vec{v}_2)$ quels que soient les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ de l'espace de départ de T et les scalaires c_1 et c_2. 44
ex. 23, p. 78 S3 Une application linéaire $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est entièrement déterminée par son action sur les colonnes de la matrice unité $n \times n$ 45	ex. 23, p. 78 S3 Une rotation autour de l'origine est une applicaiton linéaire 46
ex. 23, p. 78 S3 Si l'on effectue deux transformations linéaires l'une après l'autre, le résultat peut ne pas correspondre à une application linéaire 47	ex. 23, p. 78 S3 Une application $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est surjective si tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$ a une image dans $\mathbb{R}^m$. 48

faux

faux

42

41

vrai

faux

44

43

vrai

vrai

46

45

faux

faux

48

47

ex. 23, p. 78 S3 Si A est une matrice 3×2, alors l'application $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ ne peut pas être injective. 49	ex. 15, p. 110 S4 Si A et B sont deux matrices 2×2 dont on note respectivement $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ et $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ les colonnes, alors le produit AB vaut $AB = \begin{bmatrix} \vec{a}_1\vec{b}_1 & \vec{a}_2\vec{b}_2 \end{bmatrix}$ 50
ex. 15, p. 110 S4 Les colonnes de AB sont les combinaisons linéaires des colonnes de B dont les coefficients sont les composantes correspondantes des colonnes de A. 51	ex. 15, p. 110 S4 $AB + AC = A(B + C)$ 52
ex. 15, p. 110 S4 $A^\top + B^\top = (A + B)^\top$ 53	ex. 15, p. 110 S4 La transposée d'un produit de matrices est le produit dans le même ordre de leurs transposées. 54
ex. 16, p. 110 S4 La première ligne de AB est celle obtenue en multipliant à droite la première ligne de A par B 55	ex. 16, p. 110 S4 Si A et B sont des matrices 3×3 et $B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{bmatrix}$, alors $AB = \begin{bmatrix} A\vec{b}_1 + A\vec{b}_2 + A\vec{b}_3 \end{bmatrix}$ 56

faux

faux

50

49

vrai

faux

52

51

faux

vrai

54

53

faux

faux

56

55

ex. 16, p. 110 S4 Si A est une matrice $n \times n$, alors $(A^2)^\top = (A^\top)^2$. 57	ex. 16, p. 110 S4 $(ABC)^\top = C^\top A^\top B^\top$ 58
ex. 16, p. 110 S4 La transposée de la somme de deux matrices est égale à la somme de leurs transposées 59	ex. 9, p. 118 S4 Pour qu'une matrice B soit l'inverse de A, les deux relations $AB = I$ et $BA = I$ doivent être vérifiées. 60
ex. 9, p. 118 S4 Si A et B sont deux matrices $n \times n$ inversibles, alors l'inverse de AB est $A^{-1}B^{-1}$ 61	ex. 9, p. 118 S4 Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Si $ab - cd \neq 0$, alors A est inversible. 62
ex. 9, p. 118 S4 Si A est une matrice $n \times n$ inversible, alors l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ est compatible <i>quel que soit</i> le vecteur $\vec{b}$ de $\mathbb{R}^n$ 63	ex. 9, p. 118 S4 Toute matrice élémentaire est inversible. 64

faux

vrai

58

57

vrai

vrai

60

59

faux

faux

62

61

vrai

vrai

64

63

ex. 10, p. 118-119 S4 Si A est inversible, alors les opérations élémentaires sur les lignes qui transforment A en la matrice unité I_n transforment aussi A^{-1} en I_n. 65	ex. 10, p. 118-119 S4 Si A est inversible, alors l'inverse de A^{-1} est la matrice A elle-même. 66
ex. 10, p. 118-119 S4 Un produit de matrices $n \times n$ inversibles est inversible et l'inverse du produit est le produit des inverses dans le même ordre. 67	ex. 10, p. 118-119 S4 Si A est une matrice $n \times n$ inversible et que l'équation $A\vec{x} = \vec{e}_j$ est compatible pour $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, alors A est inversible ($\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ désignant les vecteurs colonnes de la matrice unité). 68
ex. 10, p. 118-119 S4 Si la méthode du pivot permet de transformer A en la matrice unité, alors A est nécessairement inversible. 69	ex. 11, p. 124-125 S5 Avec A $n \times n$: si l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ admet la solution triviale comme unique solution, alors A est équivalente selon les lignes à la matrice unité $n \times n$ 70
ex. 11, p. 124-125 S5 Avec A $n \times n$: si les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^n$, alors elles sont linéairement indépendantes. 71	ex. 11, p. 124-125 S5 Si A est une matrice $n \times n$, alors l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ a au moins une solution, quel que soit le vecteur $\vec{b}$ de $\mathbb{R}^n$ 72

vrai

faux

66

65

vrai

faux

68

67

vrai

vrai

70

69

faux

vrai

72

71

ex. 11, p. 124-125 S5 Avec $A \ n \times n$: si l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ admet une solution non triviale, alors A a moins de n positions de pivot. 73	ex. 11, p. 124-125 S5 Avec $A \ n \times n$: si $A^\top$ n'est pas inversible, alors A n'est pas inversible. 74
ex. 12, p. 125 S5 S'il existe une matrice D de type $n \times n$ telle que $AD = I$, alors $DA = I$. 75	ex. 12, p. 125 S5 Si l'application linéaire $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ va de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, alors la forme échelonnée réduite de A est I. 76
ex. 12, p. 125 S5 Avec $A \ n \times n$: si les colonnes de A sont linéairement indépendantes, alors elles engendrent $\mathbb{R}^n$ 77	ex. 12, p. 125 S5 Si l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ a au moins une solution pour tout vecteur $\vec{b}$ de $\mathbb{R}^n$, alors l'application $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ n'est pas injective. 78
ex. 12, p. 125 S5 S'il existe un vecteur $\vec{b}$ de $\mathbb{R}^n$ tel que l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ soit compatible, alors, la solution est unique. 79	ex. 11, p. 131 S5 Si $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}$, avec A_1 et A_2 respectivement de même taille que B_1 et B_2, alors $A + B = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 & A_2 + B_2 \end{bmatrix}$. 80

vrai

vrai

74

73

faux

vrai

76

75

faux

vrai

78

77

vrai

faux

80

79

ex. 11, p. 131 S5 Si $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$, alors les décompositions de A et B sont conformes par la multiplication par blocs. 81	ex. 12, p. 131 S5 Si A_1, A_2, B_1 et B_2 sont des matrices $n \times n$, $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}$, alors le produit BA est défini mais pas le produit AB. 82
ex. 12, p. 131 S5 Si $A = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$, alors la transposée de A est $A^\top = \begin{bmatrix} P^\top & R^\top \\ Q^\top & S^\top \end{bmatrix}$. 83	ex. 1, p. 173 S5 Si A et B sont des matrices $m \times n$, alors les deux matrices $AB^\top$ et $A^\top B$ sont définies. 84
ex. 1, p. 173 S5 Si $AB = C$ et que C a deux colonnes, alors A a deux colonnes. 85	ex. 1, p. 173 S5 Multiplier à gauche une matrice B par une matrice diagonale A à coefficient diagonaux non nuls revient à multiplier chaque ligne de B par un scalaire. 86
ex. 1, p. 173 S5 Si $BC = BD$, alors $C = D$. 87	ex. 1, p. 173 S5 Si $AC = 0$, alors $A = 0$ ou $C = 0$. 88

faux

faux

82

81

vrai

faux

84

83

vrai

faux

86

85

faux

faux

88

87

ex. 1, p. 173	S5	ex. 1, p. 173	S5
Si A et B sont deux matrices de type $n \times n$, alors $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.	89	Une matrice élémentaire $n \times n$ a soit n coefficients non nuls, soit $n + 1$	90
ex. 1, p. 173	S5	ex. 1, p. 173	S5
La transposée d'une matrice élémentaire est une matrice élémentaire	91	Une matrice élémentaire est nécessairement carrée	92
ex. 1, p. 173	S5	ex. 1, p. 173	S5
Toute matrice carrée est un produit de matrices élémentaires	93	Si A est une matrice 3×3 admettant trois positions de pivot, alors il existe des matrices élémentaires $E_1, \dots, E_p$ telles que $E_1 \cdots E_p A = I$.	94
ex. 1, p. 173	S5	ex. 1, p. 173	S5
Si $AB = I$, alors A est inversible.	95	Si A et B sont carrées inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$	96

vrai

faux

90

89

vrai

vrai

92

91

vrai

faux

94

93

faux

faux

96

95

ex. 1, p. 173 S5 Si $AB = BA$ et si A est inversible, alors $A^{-1}B = BA^{-1}$. 97	ex. 1, p. 173 S5 Si A est inversible et que $r \neq 0$, alors $(rA)^{-1} = rA^{-1}$ 98
ex. 1, p. 173 S5 Si A est une matrice 3×3 et que l'équation $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ admet une unique solution, alors A est inversible. 99	ex. 39, p. 181 S6 Un déterminant $n \times n$ est défini à l'aide des déterminants de sous-matrices $(n-1) \times (n-1)$ 100
ex. 39, p. 181 S6 Le cofacteur (i, j) d'une matrice A est la matrice A_{ij} obtenue en supprimant dans A la i^e ligne et la j^e colonne. 101	ex. 40, p. 181 S6 Le développement suivant une colonne de $\det A$ est l'opposé de son développement suivant une ligne. 102
ex. 40, p. 181 S6 Le déterminant d'une matrice triangulaire est la somme de ses coefficient diagonaux 103	ex. 27, p. 189 S6 Une opération élémentaire de remplacement de ligne ne change pas le déterminant d'une matrice. 104

faux

vrai

98

97

vrai

vrai

100

99

faux

faux

102

101

vrai

faux

104

103

ex. 27, p. 189 S6 Le déterminant de A est le produit des pivots d'une forme échelonne quelconque U de A, multipliée par $(-1)^r$, où r est le nombre d'échange effectués pendant la réduction de A à U. 105	ex. 27, p. 189 S6 Si les colonnes de A sont linéairement dépendantes, alors $\det A = 0$. 106
ex. 27, p. 189 S6 $\det(A + B) = \det A + \det B$ 107	ex. 28, p. 189 S6 Si l'on effectue successivement deux échanges de lignes, alors le nouveau déterminant est égal à l'ancien 108
ex. 28, p. 189 S6 Le déterminant de A est le produit des coefficients diagonaux de A 109	ex. 28, p. 189 S6 Si $\det A$ est nul, alors soit deux lignes ou deux colonnes sont égales, soit l'une des lignes ou l'une des colonnes est nulle. 110
ex. 28, p. 189 S6 $\det A^\top = (-1) \det A$ 111	ex. 1, p. 199 S6 Si A est une matrice 2×2 de déterminant nul, alors l'une des colonnes de A est colinéaire à l'autre 112

vrai

vrai

106

105

vrai

faux

108

107

faux

faux

110

109

vrai

faux

112

111

ex. 1, p. 199 S6 Si A est une matrice 3×3 dont deux colonens sont égales, alors $\det A = 0$ 113	ex. 1, p. 199 S6 Si A est une matrice 3×3, alors $5 \det A = \det 5A$ 114
ex. 1, p. 199 S6 Si A et B sont des matrices $n \times n$, avec $\det A = 2$ et $\det B = 3$, alors $\det A + B = 5$ 115	ex. 1, p. 199 S6 Si A est une matrice $n \times n$ telle que $\det A = 2$, alors $\det A^3 = 6$ 116
ex. 1, p. 199 S6 Si B est obtenue en échangeant deux lignes de A, alors $\det A = \det B$ 117	ex. 1, p. 199 S6 Si B est obtenue en multipliant la ligne 3 de A par 5, alors $\det B = 5 \cdot \det A$ 118
ex. 1, p. 199 S6 Si B est obtenue en ajoutant à une ligne de A une combinaison linéaire des autres lignes, alors $\det B = \det A$ 119	ex. 1, p. 199 S6 $\det A^T = -\det A$ 120

faux

vrai

114

113

faux

faux

116

115

vrai

faux

118

117

faux

vrai

120

119

ex. 1, p. 199 S6 $\det(-A) = -\det A$ 121	ex. 1, p. 199 S6 $\det A^T A \geq 0$ 122
ex. 1, p. 199 S6 Tout système de n équations linéaires à n inconnues peut être résolu par les formules de Cramer. 123	ex. 1, p. 199 S6 Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et que l'on a $\det \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{bmatrix} = 10$, alors l'aire du triangle du plan de sommet $\vec{0}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égale à 10 124
ex. 1, p. 199 S6 Si $A^3 = 0$, alors $\det A = 0$ 125	ex. 1, p. 199 S6 Si A est inversible, alors $\det A^{-1} = \det A$ 126
ex. 1, p. 199 S6 Si A est inversible, alors $(\det A)(\det A^{-1}) = 1$ 127	ex. 23, p. 211-212 S7 Soit $\mathbf{f}$ une fonction de l'espace vectoriel V des fonctions à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}$. S'il existe un réel t tel que $\mathbf{f}(t) = 0$, alors $\mathbf{f}$ est le vecteur nul de V. 128

vrai

faux

122

121

faux

faux

124

123

faux

vrai

126

125

faux

vrai

128

127

ex. 23, p. 211-212 S7 Un vecteur est une flèche dans un espace à trois dimensions 129	ex. 23, p. 211-212 S7 Une partie d'un espace vectoriel V est un sous-espace de V si elle contient le vecteur nul 130
ex. 23, p. 211-212 S7 Un sous-espace vectoriel est aussi un espace vectoriel 131	ex. 24, p. 213 S7 On appelle vecteur un élément quelconque d'un espace vectoriel 132
ex. 24, p. 213 S7 Si $\vec{u}$ est un vecteur d'un espace vectoriel V, alors $(-1)\vec{u}$ est l'opposé de $\vec{u}$ 133	ex. 24, p. 213 S7 Un espace vectoriel est aussi un sous-espace vectoriel 134
ex. 24, p. 213 S7 $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ 135	ex. 24, p. 213 S7 Une partie H d'un espace vectoriel V est un sous-espace de V si les conditions suivantes sont vérifiées : (i) le vecteur nul de V appartient à H, (ii) $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u} + \vec{v}$ appartiennent à H et (iii) c est un scalaire et $c\vec{u}$ appartient à H 136

faux

faux (lol)

130

129

vrai

vrai

132

131

vrai

vrai

134

133

faux

faux

136

135

ex. 25, p. 222 S7 Le noyau de A est l'ensemble des solutions de l'équation $A\vec{x} = 0$ 137	ex. 25, p. 222 S7 Le noyau d'une matrice $m \times n$ est inclus dans $\mathbb{R}^m$. 138
ex. 25, p. 222 S7 L'espace engendré par les colonnes de A est l'image de l'application $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ 139	ex. 25, p. 222 S7 Si l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ est compatible, alors $\text{Im } A$ est égal à $\mathbb{R}^m$. 140
ex. 25, p. 222 S7 Le noyau d'une application linéaire est un espace vectoriel 141	ex. 25, p. 222 S7 $\text{Im } A$ est l'ensemble des vecteurs pouvant s'écrire sous la forme $A\vec{x}$ pour un certain $\vec{x}$ 142
ex. 26, p. 222 S7 Le noyau d'une matrice est un espace vectoriel. 143	ex. 26, p. 222 S7 L'image d'une matrice $m \times n$ est incluse dans $\mathbb{R}^m$. 144

faux

vrai

138

137

faux

vrai

140

139

vrai

vrai

142

141

vrai

vrai

144

143

ex. 26, p. 222 S7 Im A est l'ensemble des solutions de l'équations $A\vec{x} = \vec{b}$. 145	ex. 26, p. 222 S7 Ker A est le noyau de l'application $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ 146
ex. 26, p. 222 S7 L'image d'une application linéaire est un espace vectoriel. 147	ex. 26, p. 222 S7 L'ensemble des solutions d'une équation différentielle homogène est égal au noyau d'une certaine application linéaire. 148
ex. 21, p. 230 S8 Toute famille constituée d'un seul vecteur est liée 149	ex. 21, p. 230 S8 Si H est l'espace vectoriel engendré par $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_p\}$, alors $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_p\}$ est une base de H. 150
ex. 21, p. 230 S8 Les colonnes d'une matrice $n \times n$ inversible forment une base de $\mathbb{R}^n$. 151	ex. 21, p. 230 S8 Une base des une famille génératrice aussi grande que possible. 152

vrai

faux

146

145

vrai — wtf

vrai

148

147

faux

faux

150

149

faux

vrai

152

151

ex. 21, p. 230 S8 Dans certains cas, des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice peuvent modifier les relations de dépendances linéaires entre ses colonnes 153	ex. 22, p. 230 S8 Toute famille libre de vecteurs d'un sous-espace vectoriel H est une base de H 154
ex. 22, p. 230 S8 Si une famille finie F de vecteurs non nuls engendre un espace vectoriel V, alors on peut extraire de F une base de V. 155	ex. 22, p. 230 S8 Une base est une famille libre aussi grande que possible. 156
ex. 22, p. 230 S8 Si B est une forme échelonnée d'une certaine matrice A, alors les colonnes pivots de B forment une base de $\text{Im } A$ 157	ex. 15, p. 239 S8 Si $\vec{x}$ est un vecteur de V et si $\mathcal{B}$ contient n vecteurs, alors la colonne de composantes de $\vec{x}$ dans $\mathcal{B}$ appartient à $\mathbb{R}^n$ 158
ex. 15, p. 239 S8 Si $P_{\mathcal{B}}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à la base canonique, alors pour tout $\vec{x}$ dans V, $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}\vec{x}$ 159	ex. 15, p. 239 S8 Les espaces vectoriels $\mathbb{P}_3$ et $\mathbb{R}_3$ sont isomorphes. 160

faux

faux

154

153

vrai

vrai

156

155

vrai

faux

158

157

faux — isomorphe : a une forme identique

faux

160

159

ex. 16, p. 239 S8 Si $\mathcal{B}$ est une base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors la colonnes des composantes dans la base $\mathcal{B}$ d'un vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$ n'est autre que le vecteur $\vec{x}$ lui-même. 161	ex. 16, p. 239 S8 La bijection $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} \mapsto \vec{x}$ est appelée application coordonnées. 162
ex. 16, p. 239 S8 Un plan de $\mathbb{R}^3$ est dans certains cas isomorphe à $\mathbb{R}^2$ 163	ex. 19, p. 246 S8 La dimension de l'image d'une matrice est égale au nombre de ses colonnes pivots. 164
ex. 19, p. 246 S8 Tout plan de $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. 165	ex. 19, p. 246 S8 L'espace $\mathbb{P}_4$ est de dimension 4 166
ex. 19, p. 246 S8 Si $\dim V = n$ et si F est une famille libre de vecteurs de V, alors F est une base de V. 167	ex. 19, p. 246 S8 Si $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ est une famille génératrice d'un espace vectoriel V de dimension finie et si T est une famille contenant strictement plus de p vecteurs de V, alors T est liée 168

faux

vrai

162

161

vrai

vrai

164

163

faux

faux

166

165

vrai

faux

168

167

ex. 20, p. 246 $\mathbb{R}^2$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 169	S8 ex. 20, p. 246 Si A est une matrice, la dimension de $\text{Ker } A$ est égale au nombre d'inconnues dans l'équation $A\vec{x} = 0$ 170
ex. 20, p. 246 Si une famille infinie engendre un espace vectoriel, alors ce dernier est de dimension infinie 171	S8 ex. 20, p. 246 Si $\dim V = n$ et si F engendre V, alors F est une base de V 172
ex. 20, p. 246 Le seul sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 est $\mathbb{R}^3$ lui-même 173	S8 ex. 29, p. 247 S'il existe une famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ qui engendre V, alors $\dim V \leq p$ 174
ex. 29, p. 247 S'il existe une famille libre $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ qui engendre V, alors $\dim V \geq p$ 175	S8 ex. 29, p. 247 Si $\dim V = p$, alors il existe une famille génératrice de $p + 1$ vecteurs de V 176

faux

faux

170

169

faux

faux

172

171

vrai

vrai

174

173

vrai

vrai

176

175

ex. 30, p. 247 S8 S'il existe une famille liée $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ qui engendre V, alors $\dim V \leq p$ 177	ex. 30, p. 247 S8 Si aucune famille de p vecteurs de V n'engendre V, alors $\dim V > p$. 178
ex. 30, p. 247 S8 Si $p \geq 2$ et que $\dim V = p$, alors toute famille de $p - 1$ vecteurs non nuls est libre 179	ex. 17, p. 254 S9 L'espace engendré par les lignes de A est égal à celui engendré par les colonnes de $A^\top$. 180
ex. 17, p. 254 S9 Si B est une forme échelonnée de A et si B possède exactement trois lignes non nulles, alors les trois premières lignes de A forment une base de $\text{Lgn } A$. 181	ex. 17, p. 254 S9 Les espaces engendrés par les colonnes et par les lignes de A ont même dimension, même si A n'est pas carrée. 182
ex. 17, p. 254 S9 La somme des dimensions du noyau de A et de l'espace engendré par ses lignes est égale au nombre de lignes de A. 183	ex. 17, p. 254 S9 Lors d'un calcul informatique, des opérations élémentaires sur les lignes peuvent modifier le rang apparent d'une matrice. 184

vrai

faux

178

177

vrai

faux

180

179

vrai

faux

182

181

vrai

faux

184

183

ex. 18, p. 254 S9 Si B est une forme échelonnée de A, alors les colonnes pivots de B forment une base de l'image de A. 185	ex. 18, p. 254 S9 Les opérations élémentaires sur les lignes conservent les relations de dépendances linéaire entre les lignes de A. 186
ex. 18, p. 254 S9 La dimension du noyau de A est égale au nombre de colonnes de A qui <i>ne sont pas</i> des colonnes pivots. 187	ex. 18, p. 254 S9 L'espace engendré par les lignes de $A^\top$ est égal à celui engendré par les colonnes de A. 188
ex. 18, p. 254 S9 Si A et B sont deux matrices équivalentes selon les lignes, alors les espaces engendrés par leurs lignes sont les mêmes. 189	ex. 1, p. 281-282 S9 L'ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ est un espace vectoriel. (où les vecteurs $F = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ sont des vecteurs non nuls d'un espace vectoriel V non nul) 190
ex. 1, p. 281-282 S9 Si $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{p-1})$ engendre V, alors F engendre V. (où les vecteurs $F = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ sont des vecteurs non nuls d'un espace vectoriel V non nul) 191	ex. 1, p. 281-282 S9 Si $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{p-1})$ est libre, alors il en va de même de F. (où les vecteurs $F = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ sont des vecteurs non nuls d'un espace vectoriel V non nul) 192

faux

faux

186

185

vrai

vrai

188

187

vrai

vrai

190

189

faux

vrai

192

191

ex. 1, p. 281-282 S9 Si F est libre, alors c'est une base de V. (où les vecteurs $F = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ sont des vecteurs non nuls d'un espace vectoriel V non nul) 193	ex. 1, p. 281-282 S9 Si $\text{Vect } F = V$, alors on peut extraire de F une base de V. (où les vecteurs $F = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ sont des vecteurs non nuls d'un espace vectoriel V non nul) 194
ex. 1, p. 281-282 S9 Si $\dim V = p$ et $\text{Vect } F = V$, alors F est forcément libre. (où les vecteurs $F = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ sont des vecteurs non nuls d'un espace vectoriel V non nul) 195	ex. 1, p. 281-282 S9 Un plan de $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2. 196
ex. 1, p. 281-282 S9 Les colonnes non pivots d'une matrice sont toujours linéairement dépendantes 197	ex. 1, p. 281-282 S9 Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice A peuvent modifier les relations de dépendances linéaire entre les lignes de la matrice. 198
ex. 1, p. 281-282 S9 Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice peuvent modifier son noyau. 199	ex. 1, p. 281-282 S9 Le rang d'une matrice est égal au nombre de lignes non nulles de cette matrice. 200

vrai

faux

194

193

faux

vrai

196

195

vrai

faux

198

197

faux

faux

200

199

ex. 1, p. 281-282 S9 Si A est une matrice $m \times n$ équivalente selon les lignes à une matrice échelonnée U et si U a k lignes non nulles, alors l'espace des solutions de l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ est de dimension $m - k$. 201	ex. 1, p. 281-282 S9 Si B se déduit de A par une suite d'opération élémentaire sur les lignes, alors $\text{rg } B = \text{rg } A$. 202
ex. 1, p. 281-282 S9 Les lignes non nulles d'une matrice A forment une base de $\text{Lgn } A$. 203	ex. 1, p. 281-282 S9 Si deux matrices A et B ont la même forme échelonnée réduite, alors $\text{Lgn } A = \text{Lgn } B$. 204
ex. 1, p. 281-282 S9 Si H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, alors il existe une matrice A de type 3×3 telle que $H = \text{Im } A$. 205	ex. 1, p. 281-282 S9 Si A est une matrice $m \times n$ et que $\text{rg } A = m$, alors l'application linéaire $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ est injective. 206
ex. 1, p. 281-282 S9 Si A est une matrice $m \times n$ et que l'application linéaire $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ est surjective, alors $\text{rg } A = m$. 207	ex. 1, p. 281-282 S9 Une matrice de passage est toujours inversible. 208

vrai

faux

202

201

vrai

faux

204

203

faux

vrai

206

205

vrai

vrai

208

207

ex. 1, p. 281-282 S9 Si $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ et $\mathcal{C} = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n)$ sont des bases d'un espace vectoriel V, alors la j^e colonne de la matrice de passage $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ est égale à la colonne de composante $[\vec{c}_j]_{\mathcal{B}}$ 209	ex. 21, p. 292 S10 S'il existe un vecteur $\vec{x}$ tel que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, alors λ est une valeur propre de A. 210
ex. 21, p. 292 S10 Une matrice A est non inversible si et seulement si 0 est valeur propre de A. 211	ex. 21, p. 292 S10 Le nombre c est valeur propre de A si et seulement si l'équation $(A - cI)\vec{x} = \vec{0}$ admet une solution non triviale 212
ex. 21, p. 292 S10 Il peut être difficile de trouver un vecteur propre de A, mais il est en revanche facile de vérifier qu'un vecteur donné est bien vecteur propre de A. 213	ex. 21, p. 292 S10 Pour trouver les valeurs propres de A, il suffit de réduire A à une forme échelonnée. 214
ex. 22, p. 292 S10 S'il existe un scalaire λ tel que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, alors $\vec{x}$ est vecteur propre de A. 215	ex. 22, p. 292 S10 Deux vecteurs propres $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ linéairement indépendants sont associés à des valeurs propres distinctes. 216

faux

faux

210

209

vrai

vrai

212

211

faux

vrai

214

213

faux

faux

216

215

ex. 22, p. 292 S10 Un vecteur d'état stationnaire d'une matrice stochastique en est vecteur propre 217	ex. 22, p. 292 S10 Les valeurs propres d'une matrice sont situées sur sa diagonale principale 218
ex. 22, p. 292 S10 Tout sous-espace propre de A est le noyau d'une certaine matrice 219	ex. 21, p. 301 S10 Le déterminant d'une matrice est égal au produit de ses éléments diagonaux. 220
ex. 21, p. 301 S10 Une opération élémentaire sur les lignes de A ne change pas son déterminant 221	ex. 21, p. 301 S10 $(\det A)(\det B) = \det AB$ 222
ex. 21, p. 301 S10 Si $\lambda + 5$ est en facteur dans le polynôme caractéristique de A, alors 5 est valeur propre de A. 223	ex. 22, p. 301 S10 Si A est une matrice 3×3 dont on note les vecteurs colonnes $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ et $\vec{a}_3$ alors $\det A$ est égal au volume du parallélépipède déterminé par les vecteurs $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ et $\vec{a}_3$. 224

faux

vrai — lol

218

217

faux

vrai

220

219

vrai

faux

222

221

faux

faux

224

223

ex. 22, p. 301 S10 $\det A^T = (-1) \det A$ 225	ex. 22, p. 301 S10 L'ordre de multiplicité d'une racine r du polynôme caractéristique de A est appelé multiplicité algébrique de la valeur propre r. 226
ex. 22, p. 301 S10 Une opération de remplacement de ligne dans A (ajout à une ligne d'une ligne colinéaire à une autre) ne modifie pas les valeurs propres 227	ex. 21, p. 308 S10 A est diagonalisable s'il existe une matrice D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$. 228
ex. 21, p. 308 S10 Si $\mathbb{R}^n$ admet une base de vecteurs propres de A, alors A est diagonalisable. 229	ex. 21, p. 308 S10 A est diagonalisable si et seulement si A admet n valeurs propres, en comptant les ordres de multiplicités. 230
ex. 21, p. 308 S10 Si A est diagonalisable, alors A est inversible 231	ex. 22, p. 308 S10 A est diagonalisable si A possède n vecteurs propres. 232

vrai

faux

226

225

faux

faux

228

227

faux

vrai

230

229

faux

faux

232

231

ex. 22, p. 308 S10 Si A est diagonalisable, alors A admet n valeurs propres distinctes. 233	ex. 22, p. 308 S10 Si $AP = PD$, avec D diagonale, alors les colonnes de P sont vecteurs propres de A. 234
ex. 22, p. 308 S10 Si A est inversible, alors A est diagonalisable. 235	ex. 1, p. 350 S10 Si A est inversible et admet 1 pour valeurs propre, alors 1 est également valeur propre de A^{-1} 236
ex. 1, p. 350 S10 Si A est équivalente selon les lignes à la matrice unité, alors A est diagonalisable. 237	ex. 1, p. 350 S10 Si A contient une ligne ou une colonne de 0, alors 0 est une valeur propre de A. 238
ex. 1, p. 350 S10 Toute valeur propre de A est une valeur propre de A^2. 239	ex. 1, p. 350 S10 Tout vecteur propre de A est vecteur propre de A^2. 240

vrai

faux

234

233

vrai

faux

236

235

vrai

faux

238

237

vrai

faux

240

239

ex. 1, p. 350 S10 Tout vecteur propre d'une matrice inversible A est vecteur propre de A^{-1}. 241	ex. 1, p. 350 S10 Une valeur propre est nécessairement non nulle. 242
ex. 1, p. 350 S10 Un vecteur propre est nécessairement non nul. 243	ex. 1, p. 350 S10 Deux vecteurs propres associés à la même valeur propre sont toujours linéairement dépendants 244
ex. 1, p. 350 S10 Deux matrices semblables ont toujours exactement les mêmes valeurs propres. 245	ex. 1, p. 350 S10 Deux matrices semblables ont toujours exactement les mêmes vecteurs propres. 246
ex. 1, p. 350 S10 La somme de deux vecteurs propres de A est vecteur propre de A. 247	ex. 1, p. 350 S10 Les valeurs propres d'une matrice triangulaire supérieure sont exactement ses coefficients diagonaux non nuls. 248

faux

faux

242

241

faux

vrai

244

243

faux

vrai

246

245

faux

faux

248

247

ex. 1, p. 350 S10 Les matrices A et $A^\top$ ont les mêmes valeurs propres, compte tenu de leur ordre de multiplicité. 249	ex. 1, p. 350 S10 Une matrice 5×5 admettant strictement moins de cinq valeurs propres distinctes est non diagonalisable. 250
ex. 1, p. 350 S10 Il existe une matrice 2×2 n'admettant aucun vecteur propre dans $\mathbb{R}^2$. 251	ex. 1, p. 350 S10 Si A est diagonalisable, alors les colonnes de A sont linéairement indépendantes. 252
ex. 1, p. 350 S10 Un vecteur non nul ne peut pas être vecteur propre de A associé à deux valeurs propres distinctes. 253	ex. 1, p. 350 S10 Une matrice (carrée) A est inversible si et seulement si il existe un système de coordonnées dans lequel l'application $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ est représentée par une matrice diagonale. 254
ex. 1, p. 350 S10 Si tous les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sont vecteurs propres de A, alors A est diagonale. 255	ex. 1, p. 350 S10 Une matrice semblable à une matrice diagonalisable est elle-même diagonalisable. 256

faux

vrai

250

249

faux

vrai

252

251

faux

vrai

254

253

vrai

vrai

256

255

ex. 1, p. 350 S10 Si A et B sont des matrices $n \times n$ inversibles alors AB est semblable à BA 257	ex. 1, p. 350 S10 Une matrice $n \times n$ admettant n vecteurs propres linéairement indépendants est inversible. 258
ex. 1, p. 350 S10 Si A est une matrice $n \times n$ diagonalisable, alors tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ s'écrit comme une combinaison linéaire de vecteurs propres de A. 259	ex. 19, p. 361 S11 $\vec{v} \cdot \vec{v} = \ \vec{v}\ ^2.$ 260
ex. 19, p. 361 S11 Pour tout scalaire c, $\vec{u} \cdot (c\vec{v}) = c(\vec{u} \cdot \vec{v})$. 261	ex. 19, p. 361 S11 Si la distance de $\vec{u}$ à $\vec{v}$ est égale à celle de $\vec{u}$ à $-\vec{v}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. 262
ex. 19, p. 361 S11 Si A est une matrice carrée, les vecteurs de $\text{Im } A$ sont orthogonaux à ceux de $\text{Ker } A$. 263	ex. 19, p. 361 S11 Si des vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ engendrent un sous-espace vectoriel W et si pour $j = 1, \dots, p$, $\vec{x}$ est orthogonal à chaque $\vec{v}_j$, alors $\vec{x}$ appartient à $W^\perp$. 264

faux

vrai

258

257

vrai

vrai

260

259

vrai

vrai

262

261

vrai

faux

264

263

ex. 20, p. 361 S11 $\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} = 0.$ 265	ex. 20, p. 361 S11 Pour tout scalaire c, $\ c\vec{v}\ = c\ \vec{v}\$. 266
ex. 20, p. 361 S11 Si $\vec{x}$ est orthogonal à tout vecteur d'un sous-espace vectoriel W, alors $\vec{x}$ appartient à $W^\perp$. 267	ex. 20, p. 361 S11 Si $\ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2 = \ \vec{u} + \vec{v}\ ^2$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. 268
ex. 20, p. 361 S11 Pour toute matrice A de type $m \times n$, les vecteurs du noyau de A sont orthogonaux à ceux de l'espace engendré par les lignes de A. 269	ex. 23, p. 370 S11 Une famille libre de vecteur de $\mathbb{R}^n$ n'est pas nécessairement orthogonale. 270
ex. 23, p. 370 S11 Si $\vec{y}$ est combinaison linéaire de vecteurs non nuls d'une famille orthogonale, alors il est possible de déterminer les coefficients linéaires sans effectuer d'opération sur les lignes d'une matrice. 271	ex. 23, p. 370 S11 Si l'on norme les vecteurs d'une famille orthogonale, alors il se peut que l'on obtienne des vecteurs qui ne sont plus orthogonaux entre eux. 272

faux

vrai

266

265

vrai

vrai

268

267

vrai

vrai

270

269

faux

vrai

272

271

ex. 23, p. 370 S11 Une matrice dont les colonnes sont orthonormées est une matrice orthogonale. 273	ex. 23, p. 370 S11 Si D est une droite vectorielle et si l'on note $\vec{y}_p$ le projeté orthogonal du vecteur $\vec{y}$ sur D, alors la distance de $\vec{y}$ à D est donnée par $\ \vec{y}_p\$. 274
ex. 24, p. 370 S11 Une famille orthogonale de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ n'est pas forcément libre. 275	ex. 24, p. 370 S11 Toute famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ telle que $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$ si $i \neq j$, est une famille orthonormée. 276
ex. 24, p. 370 S11 Soit A une matrice $m \times n$ dont les colonnes sont orthonormées. Alors l'application $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ conserve les longueurs. 277	ex. 24, p. 370 S11 Si c est un scalaire non nul, le projeté orthogonal de $\vec{y}$ sur $\vec{v}$ est égal à celui de $\vec{y}$ sur $c\vec{v}$. 278
ex. 24, p. 370 S11 Toute matrice orthogonale est inversible. 279	ex. 21, p. 378 S12 Si $\vec{z}$ est orthogonal à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$, et si $W = \text{Vect}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, alors $\vec{z}$ appartient à $W^\perp$. 280

faux

faux

274

273

faux

vrai

276

275

vrai

vrai

278

277

vrai

vrai

280

279

ex. 21, p. 378 S12 Pour tout vecteur $\vec{y}$ et pour tout sous-espace vectoriel W, le vecteur $\vec{y} - \text{proj}_W \vec{y}$ est orthogonal à W. 281	ex. 21, p. 378 S12 Le projeté orthogonale $\vec{y}_p$ de $\vec{y}$ sur un sous-espace vectoriel W dépend dans certains cas de la base orthogonale de W choisie pour calculer $\vec{y}_p$. 282
ex. 21, p. 378 S12 Si $\vec{y}$ appartient à un sous-espace vectoriel W, le projeté orthogonale de $\vec{y}$ sur W est égal à $\vec{y}$ lui-même. 283	ex. 21, p. 378 S12 Si les colonnes d'une matrice U de type $n \times p$ sont orthonormées, alors $UU^\top \vec{y}$ est le projeté orthogonale de $\vec{y}$ sur l'image (espace engendré par les colonnes) de U. 284
ex. 22, p. 378-379 S12 Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Tout vecteur appartenant à la fois à W et $W^\perp$ est nécessairement nul. 285	ex. 22, p. 378-379 S12 Dans le théorème de projection orthogonale : $\vec{y}_p = \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \dots + \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_p}{\vec{u}_p \cdot \vec{u}_p} \vec{u}_p$ chaque terme de l'expression de $\vec{y}_p$ dans la formule est lui-même le projeté orthogonal de $\vec{y}$ sur un sous-espace vectoriel de W. 286
ex. 22, p. 378-379 S12 Si $\vec{y} = \vec{z}_1 + \vec{z}_2$, où $\vec{z}_1$ appartient à un certain sous espace vectoriel W et $\vec{z}_2$ appartient à $W^\perp$, alors $\vec{z}_1$ est le projeté orthogonal de $\vec{y}$ sur W. 287	ex. 22, p. 378-379 S12 Si W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, la meilleure approximation de $\vec{y}$ par un élément de W est égal au vecteur $\vec{y} - \text{proj}_W \vec{y}$. 288

faux

vrai

282

281

vrai

vrai

284

283

vrai

vrai

286

285

faux

faux

288

287

ex. 17, p. 385 S12 Si $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base orthogonale de W alors, en multipliant $\vec{v}_3$ par c, on obtient une nouvelle base orthogonale $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, c\vec{v}_3)$. 289	ex. 17, p. 385 S12 Le procédé de Gram-Schmidt transforme une famille libre $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ en une famille orthogonale $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ telle que, pour tout k, les vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ engendrent le même espace que $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p$. 290
ex. 17, p. 385 S12 Si $A = QR$, les colonnes de Q étant orthonormées, alors $R = Q^\top A$. 291	ex. 18, p. 385 S12 Si $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ est une famille libre et que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une famille orthogonale de $W = \text{Vec}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$, alors $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base de W. 292
ex. 18, p. 385 S12 Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si un vecteur $\vec{x}$ n'appartient pas à W, alors $\vec{x} - \text{proj}_W \vec{x}$ est non nul. 293	ex. 18, p. 385 S12 Dans une factorisation QR du type $A = QR$ (en supposant que les colonnes de A sont linéairement indépendantes), les colonnes de Q forment une base orthonormée de l'espace engendré par les colonnes de A. 294
ex. 17, p. 393 S13 La méthode des moindres carrés consiste à chercher un vecteur $\vec{x}$ tel que $A\vec{x}$ soit aussi proche que possible de $\vec{b}$ 295	ex. 17, p. 393 S13 Une solution au sens des moindres carrés de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ est un vecteur $\vec{x}_p$ vérifiant l'équation $A\vec{x}_p = \vec{b}_p$, où $\vec{b}_p$ est le projeté orthogonal de $\vec{b}$ sur $\text{Im } A$. 296

vrai

faux

290

289

faux

vrai

292

291

vrai

vrai

294

293

vrai

vrai

296

295

ex. 17, p. 393 S13 Une solution au sens des moindres carrés de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ est un vecteur $\vec{x}_p$ tel que pour tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$, $\ \vec{b} - A\vec{x}\ \leq \ \vec{b} - A\vec{x}_p\$. 297	ex. 17, p. 393 S13 Toute solution de l'équation $A^\top A\vec{x} = A^\top \vec{b}$ est solution au sens des moindres carrés de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$. 298
ex. 17, p. 393 S13 Si les colonnes de A sont linéairement indépendantes, alors l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une solution au sens des moindres carrés. 299	ex. 18, p. 393 S13 Si $\vec{b}$ appartient à l'image de A, alors toute solution de $A\vec{x} = \vec{b}$ est une solution au sens des moindres carrés. 300
ex. 18, p. 393 S13 La solution au sens des moindres carrés de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ est le point de l'image de A est le plus proche de $\vec{b}$. 301	ex. 18, p. 393 S13 Si l'on combine linéairement les colonnes de A en utilisant pour coefficients les composantes d'une solution au sens des moindres carrés de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$, on obtient exactement le projeté orthogonal de $\vec{b}$ sur $\text{Im } A$. 302
ex. 18, p. 393 S13 Si $\vec{x}'$ est une solution au sens des moindres carrés de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$, alors $\vec{x}' = (A^\top A)^{-1} A^\top \vec{b}$. 303	ex. 18, p. 393 S13 Les équations normales permettent toujours de calculer numérique de façon précise et fiable des solutions au sens des moindres carrés. 304

vrai

faux

298

297

vrai

vrai

300

299

vrai

faux

302

301

faux

faux

304

303

ex. 18, p. 393 S13 Si A admet une factorisation QR du type $A = QR$, alors la meilleure façon d'obtenir une solution au sens des moindres carrés de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ est de calculer $\vec{x}' = R^{-1}Q^T\vec{b}$. 305	ex. 1, p. 418 S13 La longueur d'un vecteur est un réel strictement positif. 306
ex. 1, p. 418 S13 Tout vecteur $\vec{v}$ est de même longueur que son opposé $-\vec{v}$. 307	ex. 1, p. 418 S13 La distance entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égale à $\ \vec{u} - \vec{v}\$. 308
ex. 1, p. 418 S13 Pour tout scalaire r et tout vecteur $\vec{v}$, $\ r\vec{v}\ = r \ \vec{v}\$. 309	ex. 1, p. 418 S13 Deux vecteurs orthogonaux sont toujours linéairement indépendants. 310
ex. 1, p. 418 S13 Tout vecteur $\vec{x}$ orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u} - \vec{v}$. 311	ex. 1, p. 418 S13 Si $\ \vec{u} + \vec{v}\ ^2 = \ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. 312

faux

faux

306

305

vrai

vrai

308

307

faux

faux

310

309

vrai

vrai

312

311

ex. 1, p. 418 S13 Si $\ \vec{u} - \vec{v}\ ^2 = \ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. 313	ex. 1, p. 418 S13 Le projeté orthogonal de $\vec{y}$ sur $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{y}$. 314
ex. 1, p. 418 S13 Tout vecteur $\vec{y}$ coïncidant avec son projeté orthogonal sur un sous-espace W appartient à W. 315	ex. 1, p. 418 S13 L'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ orthogonaux à un vecteur fixé est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. 316
ex. 1, p. 418 S13 Si W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors W et $W^\perp$ n'ont aucun vecteur en commun. 317	ex. 1, p. 418 S13 Si la famille de vecteur $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est orthogonale et si c_1, c_2 et c_3 sont des scalaires, alors la famille $(c_1\vec{v}_1, c_2\vec{v}_2, c_3\vec{v}_3)$ est orthogonale. 318
ex. 1, p. 418 S13 Si les colonnes d'une matrice U sont orthonormales, alors $UU^\top = I$. 319	ex. 1, p. 418 S13 Une matrice carrée dont les colonnes sont orthogonales entre elles est une matrice orthogonale. 320

faux

vrai

314

313

vrai

vrai

316

315

vrai

faux

318

317

faux

faux

320

319

ex. 1, p. 418 S13 Si les colonnes d'une matrice carrée sont orthonormales, alors il en va de même de ses lignes. 321	ex. 1, p. 418 S13 Pour tout sous-espace vectoriel W et tout $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$, $\ \text{proj}_W \vec{v}\ ^2 + \ \vec{v} - \text{proj}_W \vec{v}\ ^2 = \ \vec{v}\ ^2$. 322
ex. 1, p. 418 S13 La solution au sens des moindres carrés d'un système $A\vec{x} = \vec{b}$ est le vecteur $A\vec{x}'$ de $\text{Im } A$ le plus proche de $\vec{b}$, c'est-à-dire celui qui vérifie $\ \vec{b} - A\vec{x}'\ \leq \ \vec{b} - A\vec{x}\$ pour tout vecteur $\vec{x}$. 323	ex. 1, p. 418 S13 Les équations normales fournissant une solution au sens des moindres carrés de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ sont données par le système $\vec{x}' = (A^\top A)^{-1} A^\top \vec{b}$. 324
ex. 25, p. 428 S13 Une matrice $n \times n$ diagonalisable en base orthonormée est nécessairement symétrique. 325	ex. 25, p. 428 S13 Si $A^\top = A$ et si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs vérifiant $A\vec{u} = 3\vec{u}$ et $A\vec{v} = 4\vec{v}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ 326
ex. 25, p. 428 S13 Toute matrice symétrique $n \times n$ admet n valeurs propres réelles distinctes. 327	ex. 25, p. 428 S13 Si $\vec{v}$ est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, alors la matrice $\vec{v}\vec{v}^\top$ est appelée matrice de projection. 328

vrai

vrai

322

321

faux

faux

324

323

vrai

vrai

326

325

faux

faux

328

327

ex. 26, p. 428 S13 Toute matrice symétrique est diagonalisable en base orthonormée. 329	ex. 26, p. 428 S13 Si P est une matrice telle que $P^\top = P^{-1}$, D est une matrice diagonale et $B = PDP^\top$, alors la matrice B est symétrique. 330
ex. 26, p. 428 S13 Toute matrice orthogonale est orthodiagonalisable. 331	ex. 26, p. 428 S13 La dimension d'un sous-espace propre d'une matrice symétrique est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée. 332
ex. 21, p. 436 S13 La matrice d'une forme quadratique est toujours symétrique. 333	ex. 21, p. 436 S13 Une forme quadratique est sans termes rectangles si et seulement si sa matrice est diagonale. 334
ex. 21, p. 436 S13 Les axes principaux de la forme quadratique $\vec{x}^\top A \vec{x}$ sont les vecteurs propres de A. 335	ex. 21, p. 436 S13 Une forme quadratique définie positive Q vérifie $Q(x) > 0$ quel que soit le vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$. 336

vrai

vrai

330

329

vrai

faux

332

331

vrai

vrai

334

333

faux

vrai

336

335

ex. 21, p. 436 S13 Si les valeurs propres d'une matrice symétrique A sont toutes strictement positives, alors la forme quadratique $\vec{x}^\top A \vec{x}$ est définie positive. 337	ex. 21, p. 436 S13 On appelle décomposition de Cholesky d'une matrice symétrique A une écriture de la forme $A = R$, où R est une matrice triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs 338
ex. 22, p. 436 S13 L'expression $\ \vec{x}\ ^2$ est une forme quadratique. 339	ex. 22, p. 436 S13 Si A est symétrique et si P est une matrice orthogonale, alors le changement de variable $\vec{x} = P\vec{y}$ transforme $\vec{x}^\top A \vec{x}$ en une forme quadratique sans termes rectangles. 340
ex. 22, p. 436 S13 Si A est une matrice symétriques 2×2, alors l'ensemble des vecteurs $\vec{x}$ tels que $\vec{x}^\top A \vec{x} = c$ (où c est une constante) correspond soit à un cercle, soit à une ellipse, soit à une hyperbole. 341	ex. 22, p. 436 S13 Une forme quadratique non définie est soit positive, soit négative. 342
ex. 22, p. 436 S13 Si A est une matrice symétrique et que la forme quadratique $\vec{x}^\top A \vec{x}$ ne prend que des valeurs strictement négatives quand $\vec{x} \neq \vec{0}$, alors les vecteurs propres de A sont strictement négatives. 343	ex. 1, p. 463 S13 Toute matrice diagonalisable en base orthonormée c'est symétrique. 344

vrai

vrai

338

337

faux

vrai

340

339

faux

faux

342

341

vrai

vrai

344

343

ex. 1, p. 463 S13 Toute matrice orthogonale est symétrique. 345	ex. 1, p. 463 S13 Si A est une matrice orthogonale, alors pour tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$, $\ A\vec{x}\ = \ \vec{x}\$. 346
ex. 1, p. 463 S13 Quelle que soit la matrice P qui diagonalise A, les colonnes de P sont les axes principaux de la forme quadratique $\vec{x}^\top A \vec{x}$. 347	ex. 1, p. 463 S13 Une matrice P de type $n \times n$ dont les colonnes sont orthogonales vérifiées $P^\top = P^{-1}$. 348
ex. 1, p. 463 S13 Toute forme quadratique dont les coefficients sont tous strictement positifs est définie positive. 349	ex. 1, p. 463 S13 Toute forme quadratique $\vec{x}^\top A \vec{x}$ telle qu'il existe un vecteur $\vec{x}$ vérifiant $\vec{x}^\top A \vec{x} > 0$ est définie positive. 350
ex. 1, p. 463 S13 Toute forme quadratique peut être transformée, au moyen d'un changement de variable approprié, en une forme quadratique sans termes rectangles. 351	ex. 1, p. 463 S13 La valeur maximale de la forme quadratique $\vec{x}^\top A \vec{x}$, sous la contrainte $\ \vec{x}\ = 1$, est égale au plus grand coefficient diagonal de A. 352

vrai

faux

346

345

faux

faux

348

347

faux

faux

350

349

faux

vrai

352

351

ex. 1, p. 463 S13 La valeur maximale d'une forme quadratique définie positive $\vec{x}^\top A \vec{x}$ est égale à la plus grande valeur propre de A. 353	ex. 1, p. 463 S13 On peut transformer une forme quadratique définie positive en une forme quadratique négative au moyen d'un changement de variable $\vec{x} = P \vec{u}$ où P est une matrice orthogonale. 354
ex. 1, p. 463 S13 Une forme quadratique non définie est une forme quadratique dont les valeurs propres ne sont pas définies. 355	ex. 1, p. 463 S13 Si P est une matrice orthogonale $n \times n$, le changement de variable $\vec{x} = P \vec{u}$ transforme la forme quadratique $\vec{x}^\top A \vec{x}$ en la forme quadratique de matrice $P^{-1} A P$. 356
ex. 1, p. 463 S13 Si U est une matrice $m \times n$ dont les colonnes sont orthogonales, le projeté orthogonal de $\vec{x}$ sur $\text{Im } U$ est égal à $U U^\top \vec{x}$. 357	

faux

faux

354

353

vrai

faux

356

355

faux

357